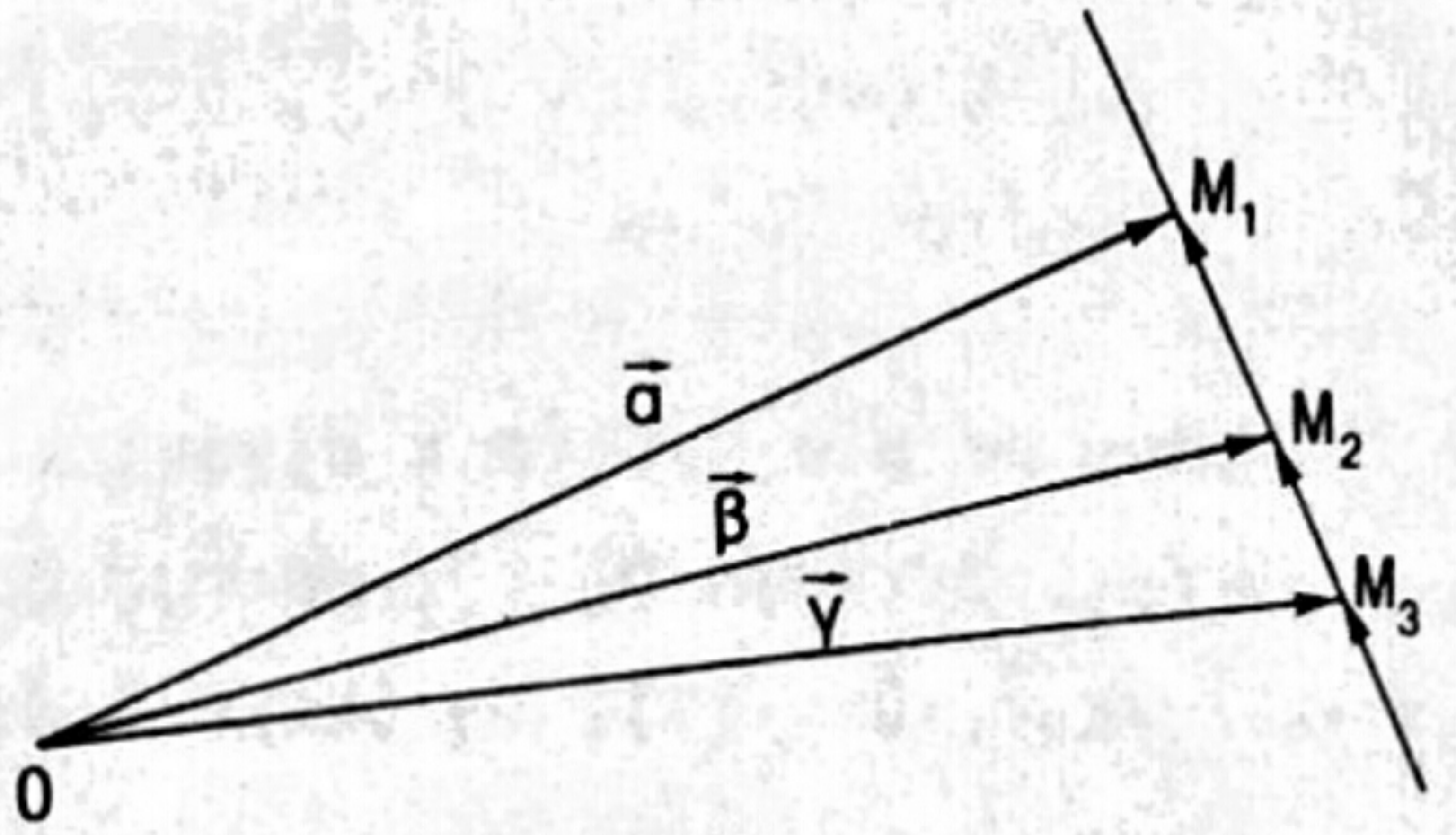
1. **Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}=\vec{OM_1}$, $\vec{\beta}=\vec{OM_2}$, $\vec{\gamma}=\vec{OM_3}$. Αν $\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}+\mu\vec{\gamma}=\vec{0}$ (1), $\kappa,\lambda,\mu \in R$, με $\kappa+\lambda+\mu=0$ (2) και τα κ, λ, μ είναι διάφορα μεταξύ τους, να δειχθεί ότι τα σημεία M_1, M_2, M_3 είναι συνευθειακά.**

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι τα διανύσματα $\vec{M_3M_1}=\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$ και $\vec{M_3M_2}=\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά (διότι τότε θα είναι συνευθειακά, εφόσον έχουν κοινή αρχή το M_3). Για να δείξουμε ότι τα $\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι συγγραμμικά, αρκεί να δείξουμε ότι είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Η (2) δίνει: $\mu=-\kappa-\lambda$, οπότε η (1) γράφεται:



$$\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}+(-\kappa-\lambda)\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \kappa(\vec{\alpha}-\vec{\gamma})+\lambda(\vec{\beta}-\vec{\gamma})=\vec{0}$$

Από την τελευταία σχέση προκύπτει, επειδή κ, λ, μ είναι διάφορα, ότι ένας τουλάχιστον των κ, λ είναι διάφορος του 0, επομένως τα $\vec{\alpha}-\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

2. **Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\kappa}=\mu\vec{\alpha}+(\mu-1)\vec{\beta}$, $\vec{u}=2\vec{\alpha}+(\mu-3)\vec{\beta}$, όπου $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ διανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα και $\mu \in R$. Να προσδιοριστεί ο μ ώστε τα διανύσματα $\vec{\kappa}$ και $\vec{u}$ να είναι γραμμικώς εξαρτημένα.**

Λύση: Πρέπει για $\lambda,\rho \in R$ η σχέση $\lambda\vec{\kappa}+\rho\vec{u}=\vec{0}$ να συνεπάγεται ότι $\lambda\neq 0$ ή $\rho\neq 0$.

Έχουμε $\lambda\vec{\kappa}+\rho\vec{u}=\vec{0} \Rightarrow \lambda[\mu\vec{\alpha}+(\mu-1)\vec{\beta}]+\rho[2\vec{\alpha}+(\mu-3)\vec{\beta}]=\vec{0} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (\lambda\mu+2\rho)\vec{\alpha}+(\lambda\mu-\lambda+\rho\mu-3\rho)\vec{\beta}=\vec{0} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\lambda\mu+2\rho=0\\ \lambda\mu-\lambda+\rho\mu-3\rho=0\end{array}\right. \quad (\Sigma)$$

(διότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα).

Το σύστημα (Σ) με αγνώστους ρ και λ γράφεται: $\left\{\begin{array}{l}\mu\lambda+2\rho=0\\ (\mu-1)\lambda+(\mu-3)\rho=0\end{array}\right\}$.

Για να έχουμε διάφορη της μηδενικής λύση, πρέπει $\begin{vmatrix}\mu & 2\\ \mu-1 & \mu-3\end{vmatrix}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \mu(\mu-3)-2(\mu-1)=0$. Η τελευταία εξίσωση δίνει τις ζητούμενες τιμές για τον μ.

3. Αν τα διανύσματα $\vec{\chi}$, $\vec{\psi}$, $\vec{z}$ του $\mathcal{E}$ είναι μη συνεπίπεδα, να δειχθεί ότι τα διανύσματα $\vec{\chi}$, $\vec{\psi}-\vec{\chi}$, $\vec{z}-\vec{\chi}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Απόδειξη: Έστω ότι $\kappa,\lambda,\mu \in \mathbb{R}$ και:

$$\kappa\vec{\chi}+\lambda(\vec{\psi}-\vec{\chi})+\mu(\vec{z}-\vec{\chi})=\vec{0} \quad \Rightarrow \quad (\kappa-\lambda-\mu)\vec{\chi}+\lambda\vec{\psi}+\mu\vec{z}=\vec{0} \qquad (1)$$

Επειδή τα διανύσματα $\vec{\chi}$, $\vec{\psi}$, $\vec{z}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, έχουμε από την (1) ότι:

$$\left\{\begin{array}{r} \kappa-\lambda-\mu=0 \\ \lambda=0 \\ \mu=0 \end{array}\right. \Rightarrow \quad \kappa=\lambda=\mu=0$$

Επομένως $\quad \kappa\vec{\chi}+\lambda(\vec{\psi}-\vec{\chi})+\mu(\vec{z}-\vec{\chi})=\vec{0} \Rightarrow \kappa=\lambda=\mu=0$

δηλαδή τα διανύσματα $\vec{\chi}$, $\vec{\psi}-\vec{\chi}$ και $\vec{z}-\vec{\chi}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

4. Θεωρούμε τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{\gamma}$, με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $|\vec{\alpha}|=2$, $|\vec{\beta}|=3$, $|\vec{\gamma}|=6$.

α) Να δειχθεί ότι $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-\dfrac{49}{2}$.

β) Να ορισθεί ο αριθμός λ, ώστε τα διανύσματα $2\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, $2\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$ να είναι κάθετα.

γ) Αν η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι $\omega=\dfrac{\pi}{3}$, να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

Λύση:

α) Είναι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha})=$
$=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+|\vec{\gamma}|^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}) \Rightarrow 0=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+|\vec{\gamma}|^2+2(\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-\frac{2^2+3^2+6^2}{2} \Rightarrow \vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\gamma}+\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}=-\frac{49}{2}$$

β) Είναι $(2\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta})(2\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta})=0 \Leftrightarrow 4\vec{\alpha}^2-2\lambda\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+2\lambda\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-\lambda^2\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow 4\vec{\alpha}^2-\lambda^2\vec{\beta}^2=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 4|\vec{\alpha}|^2-\lambda^2|\vec{\beta}|^2=0 \Rightarrow 4\cdot 4-\lambda^2 9=0 \Leftrightarrow 16=9\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{16}{9}} \Rightarrow \lambda=\pm\frac{4}{3}$$

γ) Είναι $\quad \sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}})=\dfrac{(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\,|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|} \quad (1)$

Είναι: $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\vec{\alpha}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}+\vec{\beta}\cdot\vec{\alpha}-\vec{\beta}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}^2-\vec{\beta}^2=|\vec{\alpha}|^2-|\vec{\beta}|^2=$
$=2^2-3^2=4-9=-5 \Rightarrow (\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=-5 \quad (2)$

Έχουμε ακόμα: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}+\vec{\beta})(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$
$=2^2+3^2+2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}=4+9+2\cdot 2\cdot 3\dfrac{1}{2}=19 \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|^2=19 \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=\sqrt{19} \quad (3)$

Επίσης είναι: $|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=(\vec{\alpha}-\vec{\beta})(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=|\vec{\alpha}|^2+|\vec{\beta}|^2-2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=$
$=2^2+3^2-2|\vec{\alpha}|\,|\vec{\beta}|\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3}=4+9-2\cdot 2\cdot 3\dfrac{1}{2}=7 \Rightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|^2=7 \Rightarrow |\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=\sqrt{7} \quad (4)$

Η (1) δίνει, δυν. (2), (3), (4): $\sigma\upsilon\nu(\widehat{\vec{\alpha}+\vec{\beta},\vec{\alpha}-\vec{\beta}})=\dfrac{-5}{\sqrt{19}\,\sqrt{7}}$.